

CHAPITRE 3

CONSTRUCTION D'UN GRAPHE PERT A PARTIR DU GRAPHE DES POTENTIELS

1. Introduction

Le problème d'ordonnancement consiste à organiser dans le temps un ensemble d'activités, de façon à satisfaire un ensemble de contraintes et optimiser le résultat. Parmi les méthodes de modélisation ces problème il ya la méthode des potentiel et la méthode PERT. Chacune à des avantages et des inconvénients. Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier une nouvelle méthode de MOUHOUB et al qui permet de passer d'un graphe facile (graphe AON) vers le graphe AOA qui sera correct et qui respectera la table d'ordonnancement.

2. Liens entre le graphe des potentiels et le graphe PERT

Tenant compte de la simplicité de dessin du graphe des potentiels qu'est unique, on est amené à étudier la construction d'un graphe PERT à partir du graphe des potentiels. L'opportunité de cette idée réside dans le fait que les praticiens préfèrent travailler avec le graphe PERT qu'est plus clair (chaque tache est représentée par un arc), alors que le graphe des potentiels est encombrant vu le nombre important des arcs.

Nous présenterons alors, une nouvelle méthode pour la construction du PERT à partir du graphe des potentiels, qui est basée sur le principe de graphes adjoints des graphes. [37]

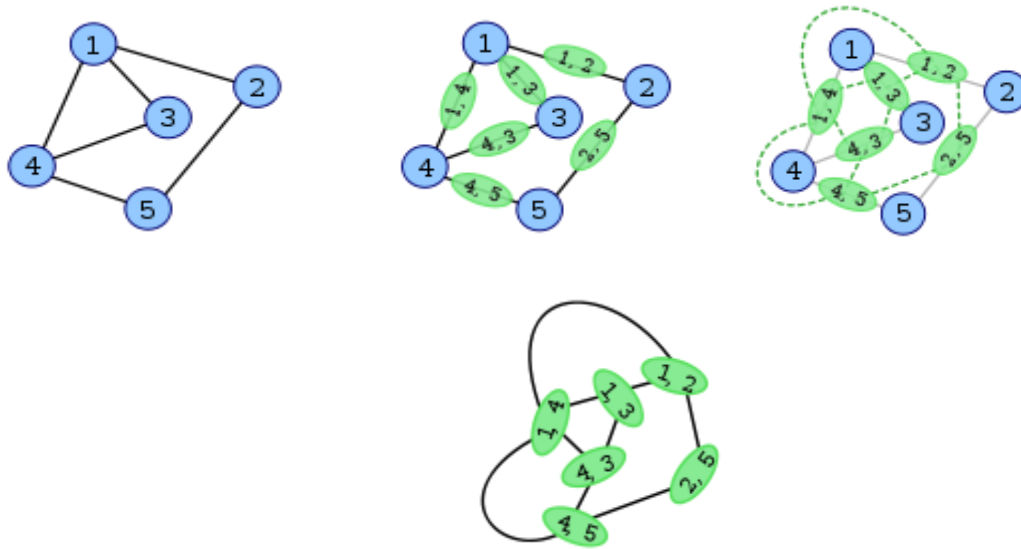
3. Le graphe adjoint de graphe

3.1 Définition

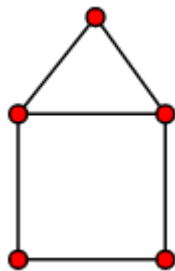
Étant donné un graphe G , son *line graph* $L(G)$ est le graphe défini de la façon suivante :

- Chaque sommet de $L(G)$ représente une arête de G .
- Deux sommets de $L(G)$ sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes partagent une extrémité commune dans G (on dit alors qu'elles sont adjacentes). [29]

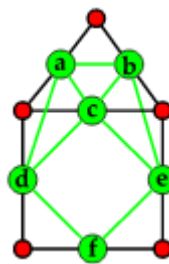
Exemples :



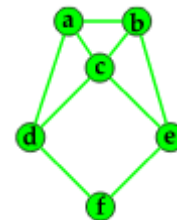
Un autre exemple de construire un graphe adjoint :



(a) Graphe (G)



(b) On relie les sommets correspondant à des arêtes adjacentes



(c) Graphe $L(G)$

Figure 3.1 exemple du graphe adjoint

Par définition, tout graphe G admet un graphe adjoint $L(G)$ unique. Par contre, deux graphes non isomorphes peuvent avoir le même graphe adjoint.

Les graphes G1, G2 et G3 suivant ont le même graphe adjoint H:

$$H=L(G1) = L(G2) = L(G3) [15]$$

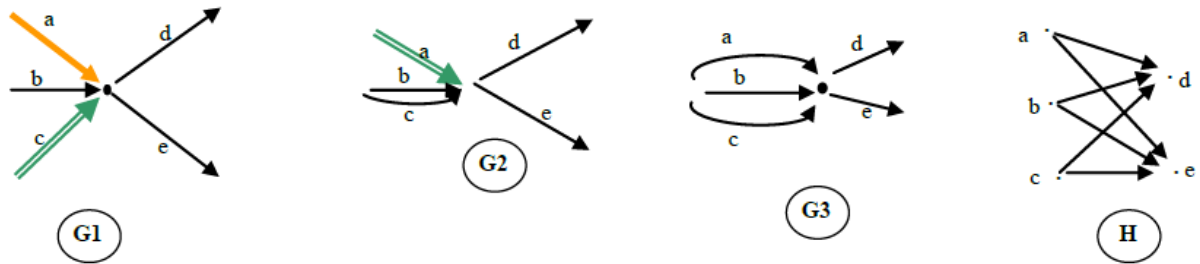


Figure 3.2 Les graphes G1 G2 et G3 du graphe adjoint H.

3.2 Le problème inverse

On pose le problème inverse suivant:

Etant donné un graphe H, est-il le graphe adjoint d'un graphe? Autrement dit, existe-t-il un graphe G tel que $L(G)$ est isomorphe à H, où $H = L(G)$?

Avant de répondre à cette question, nous définissons la notion de la configuration 'Z'.

G admet une configuration 'Z' qui est un sous graphe de G (voir fig. 5.) si G contient 4 sommets a, b, c et d tels que si (a, c), (b, c) et (b, d) sont des arcs de G, alors (a, d) n'est pas un arc de G. Pour simplifier, on donne le nom de barre de 'Z' à l'arc (b, c).

La configuration 'Z' apparaît lorsque 2 sommets ont des successeurs communs et des successeurs non communs ou par symétrie lorsque 2 sommets ont des prédécesseurs communs et des prédécesseurs non communs [36]

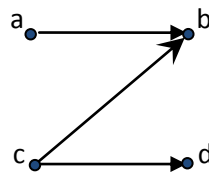


Figure 3.3 La configuration « Z ».

3.2.1 Définition de la configuration « Z »

G admet une *configuration « Z »* si G contient 4 sommets a, b, c et d tels que si (a, c), (b, c) et (b, d) sont des arcs de G, alors (a, d) n'est pas un arc de G.

Dans le seul but de simplicité, on donnera le nom de *barre du « Z »* l'arc (b,c).

La configuration « Z » apparaît lorsque 2 sommets ont des successeurs communs et des successeurs non communs ou par symétrie lorsque 2 sommets ont des prédécesseurs communs et des prédécesseurs non communs. [20]

3.3 Quelques caractérisations des graphes adjoints

- 1- H est le graphe adjoint d'un graphe G si et seulement si H ne contient aucune configuration « Z ».
- 2- H est le graphe adjoint d'un graphe G si et seulement si les arcs de H peuvent être partitionnés en bipartis complets $B_i = (X_i, Y_i)$, $i=1.., m$, tels que :[25]

$$X_i \cap X_j = \emptyset \text{ et } Y_i \cap Y_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

Les bipartis B_i de H sont alors en bijection avec les sommets notées aussi B_i qui ne sont ni sources ni puits.

Deux sommets B_i et B_j de G étant reliés par un arc de B_i vers B_j si et seulement si les bipartis complets B_i et B_j de H sont tels que $Y_i \cap X_j = \emptyset$.

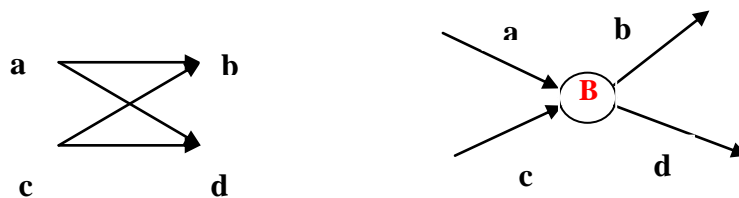


Figure 3.4 Un biparti complet B de H et l'étoile de G associée à B

Exemple :

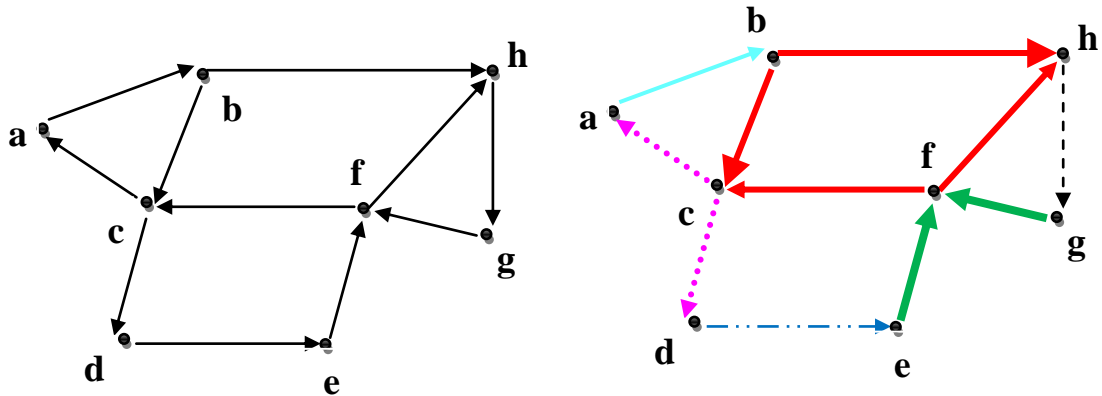


Figure 3.5 un graphe H et la partition de ses arcs en bipartis complets. Les arcs de chaque couleur représentent un biparti complet.

Supposons que le graphe H est le graphe adjoint d'un graphe G qu'on doit chercher. Pour cela, partitionnons les arcs de H en bipartis complets (Figure2) et qui sont :

$$\begin{array}{ll} B1 = \{ (a), (b) \} & B2 = \{ (c), (a, d) \} \\ B3 = \{ (d), (e) \} & B4 = \{ (e, g), (f) \} \\ B5 = \{ (b, f), (c, h) \} & B6 = \{ (h), (g) \} \end{array}$$

Le graphe G résultant tel que $H=L(G)$ est: (Figure3).

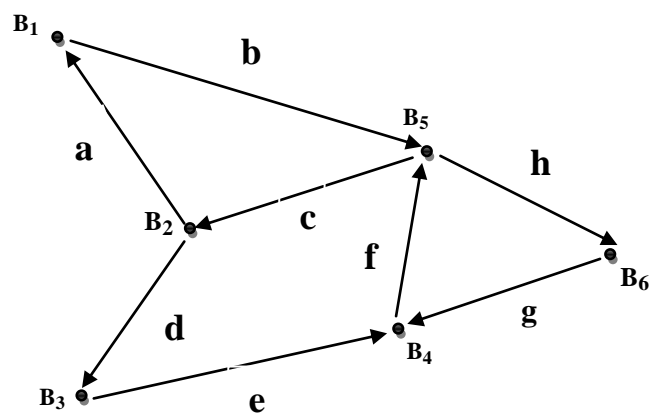


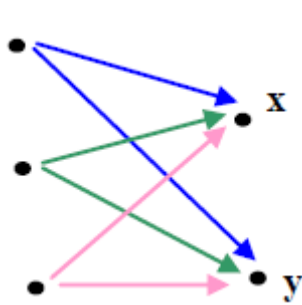
Figure 3.6 Le graphe G tel que $H = L(G)$

- 3- H est le graphe adjoint d'un graphe sans boucles si et seulement si H ne contient aucune configuration " Z ".
- 4- H est le graphe adjoint d'un graphe si et seulement si toute paire de sommets ayant des successeurs communs ont tous leurs successeurs communs.
- 5- H est le graphe adjoint d'un graphe si et seulement si toute paire de sommets ayant des prédécesseurs communs ont tous leurs prédécesseurs communs.

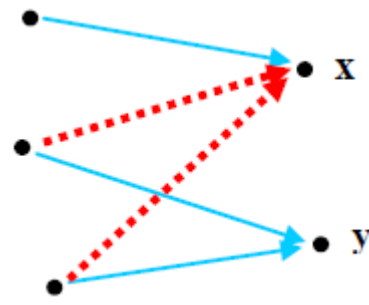
Ainsi H n'est le graphe adjoint d'aucun graphe si est seulement s'il existe une paire de sommets ayant des successeurs communs et des successeurs non communs ou des prédécesseurs communs et des prédécesseurs non communs (présence de Z).[30]

On se pose alors le problème de savoir comment transformer H pour en faire un nouveau graphe qui est le graphe adjoint d'un graphe.

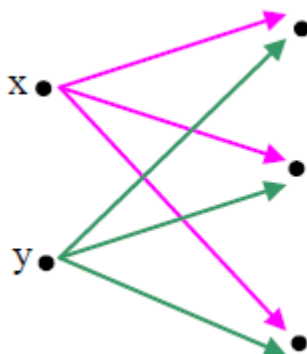
Dans le cadre des problèmes d'ordonnancement, les éventuelles transformations doivent naturellement préserver les contraintes de succession. [20]



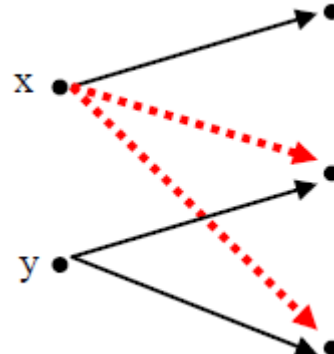
(a) x et y ont les mêmes prédécesseurs dans un graphe H.



(b) x et y n'ont pas les mêmes prédécesseurs d'où la présence des « Z ».



(c) x et y ont les mêmes successeurs.



(d) x et y n'ont pas les mêmes successeurs, d'où présence des « Z ».

Figure 3.7: Sous graphes contenant de la configuration « Z ».

4. Algorithme de construction du graphe PERT à partir du graphe des potentiels

A cause de la facilité de dessin du graphe AoN, on doit se concentrer sur l'étude de la possibilité de transformer le graphe des potentiels (nombre d'arcs important) au graphe AoA (nombre d'arcs réduit)

On se pose alors le problème de savoir comment transformer le graphe adjoint H (qui est le graphe AoN) pour obtenir le nouveau graphe G qui est le graphe AoA.

Le problème qui se pose est le suivant : est ce qu'il y a une technique ou une méthode qui nous permet de passer du graphe des potentiels (facile) au graphe des PERT (difficile) et qui aide le praticien à le faire ?

De plus, est ce qu'on peut trouver un algorithme réalisant ce travail et qui peut être programmé sur ordinateur ?

On se pose alors le problème de savoir comment transformer H (qui est le graphe des potentiels) pour en faire un nouveau graphe qui est le graphe adjoint (graphe PERT).

Le problème de passage du graphe des potentiels au graphe PERT est un sujet nouveau et que MOUHOUB et al a étudié et a présenté une algorithme qui fait le passage de PERT à des potentiel.[20]

Le problème qui se pose : est ce que H contient des configurations 'Z' ou non ? S'il ne contient pas des 'Z' il est alors adjoint d'un graphe G, sa transformation est alors immédiate. Mais s'il contient des 'Z' on est amené à éliminer la barre de chaque 'Z' en préservant naturellement les contraintes de succession uniquement. Etudions chaque cas à part :[24]

4.1 Cas où le graphe AoN est un graphe adjoint

Construisons le graphe PERT à partir du graphe des potentiels dans le cas où celui-ci est un graphe adjoint. On partitionne les arcs du graphe des potentiels en bipartis complets : $B_i = (X_i, Y_i)$.

Dans le graphe PERT que l'on veut construire, chaque B_i est représenté par un sommet encore noté B_i et sera le centre de l'étoile.

Exemple

Code	Durée	Ant.
α	0	-
A	6	α
B	7	α
C	9	α
D	13	a,b
E	11	a,b
F	3	c
Ω	0	d,e,

Table 3.1 Une table d'ordonnancement

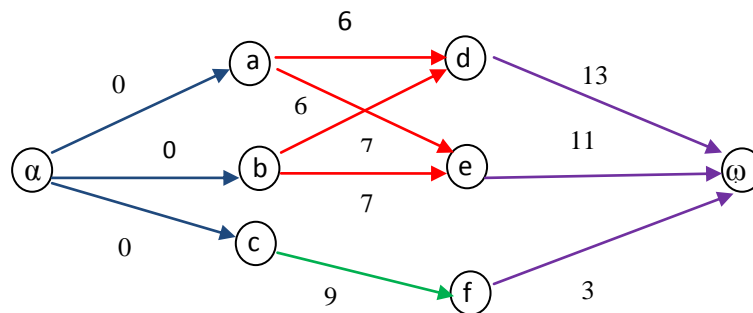


Figure 3.8 : Le graphe des potentiels de la Table 3.1. dont les arcs sont partitionnés en bipartis complets.

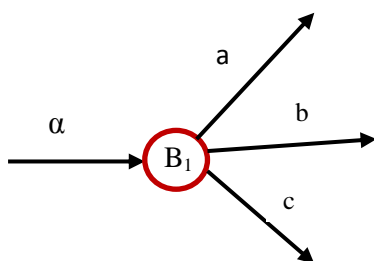
Chaque sommet B_i qui est le centre de l'étoile dans le graphe PERT représente un biparti dans le graphe des potentiels

$$B_1 = (\{\alpha\}, \{a, b, c\}),$$

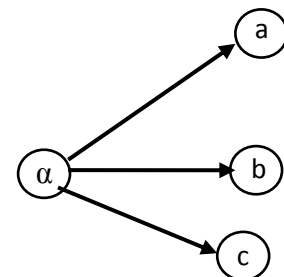
$$B_2 = (\{a, b\}, \{d, e\}),$$

$$B_3 = (\{c\}, \{f\}),$$

$$B_4 = (\{d, e, f\}, \{\Omega\}),$$



$L(B_1)$ est le biparti :



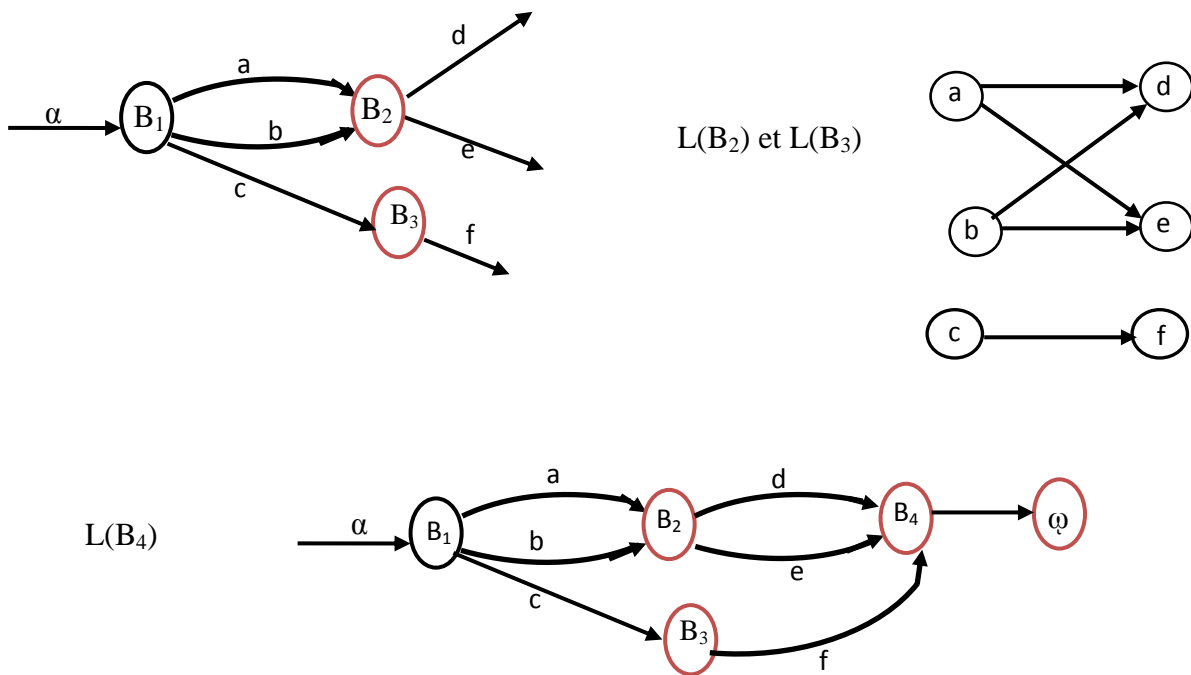


Figure 3.9 Le graphe PERT construit à partir des bipartis complets du graphe des potentiels

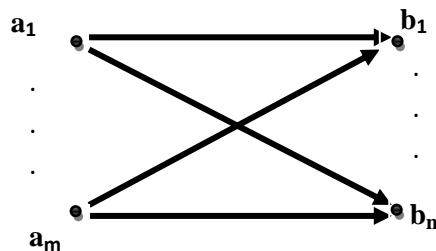
4.2 Le graphe des potentiels n'est pas un graphe adjoint

Dans ce cas le graphe AoN contient des configurations 'Z'. La construction du graphe AoA est cependant plus complexe car il n'admet pas de partition des arcs en bipartis complets. C'est dans ce cas où l'on doit le modifier afin de le transformer en graphe adjoint en préservant les contraintes d'antériorités.

Supposons que les tâches a_1, \dots, a_m précèdent les tâches b_1, \dots, b_n . Dans le graphe AoN, ces contraintes d'antériorité sont représentées par un biparti complet. Dans le graphe AoA, elles sont représentées par une étoile.[36]

Code	Antériorités
b_1	a_1, \dots, a_m
\vdots	\vdots
b_n	a_1, \dots, a_m

Le sous-tableau des antériorités de b_1, \dots, b_n



le biparti complet $B = (\{a_1, \dots, a_m\}, \{b_1, \dots, b_n\})$ dans le graphe des potentiels.

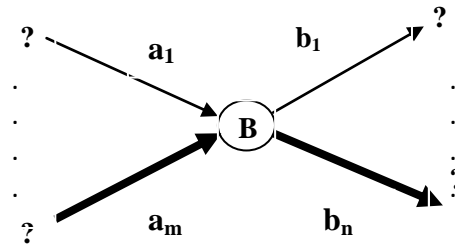


Figure 3.10 : Correspondance entre un biparti complet du graphe des potentiels et l'étoile dans le graphe PERT

Revenons maintenant au problème de la tâche fictive dans le graphe AoA. Si on a par exemple 4 tâches a, b, c et d avec les contraintes d'antériorité suivantes : a et b précèdent c, mais d est précédée par b uniquement.

Dans le graphe AoN, il n'y a aucun problème pour la représentation de ces tâches. Elle est faite comme dans la Fig. 7. Or, pour le passage du graphe AoN (qui est considéré comme le graphe adjoint H), on est obligé d'éliminer toutes les configurations 'Z'. On introduit alors, dans le graphe AoN une tâche fictive f dans tout 'Z' comme dans la Figure 3.11



Figure 3.11 : La configuration « Z » et sa transformation dans le graphe AoN avec la partition des arcs en bipartis complets.

L'introduction des tâches fictives vise donc à *éliminer* toutes les configurations 'Z' du graphe AoN, les contraintes restant inchangées. Il faut rappeler que les tâches fictives ne sont nullement nécessaires dans le graphe des potentiels mais ne sont introduites que pour construire le graphe AoA.

On pose alors le problème de la recherche des 'Z' dans le graphe AoN, c'est-à-dire des sommets ayant des successeurs communs et des successeurs non communs ou des sommets ayant des prédécesseurs communs et des prédécesseurs non communs. [36]

4.3 Algorithme de MOUHOUB et al

Soit G_v un graphe des potentiels. G_v doit être orienté, valué, connexe et sans circuit et qui a une source et un puits. G_v étant un graphe conjonctif, organisé en niveaux. On veut construire le graphe PERT correspondant qui est appelé G_e . [20]

une première technique d'élimination des Z dans G_v consiste à remplacer la barre (b, c) de tout « Z » par deux arcs (b, f) et (f, c) , selon la figure 11, c'est la plus simple mais la plus mauvaise, le nombre des « Z » pouvant être arbitrairement grand.

Début

Si G_v contient des configurations Z **alors**

Repérer les Z_i ($i = 1, 2, \dots, m$)

Pour i allant de 1 à m **faire**

- Créer le sommet f_i dans G_v
- Remplacer la barre (b_i, c_i) de Z_i par $(b_i, f_i), (f_i, c_i)$

Fpour

FSi

- Repérer les bipartis dans G_v ;
- Représenter chaque biparti B_i dans G_v par un sommet B_i dans G_e ;
- Représenter les arcs de façon que :
Un arc est dessiné entre 2 sommets B_i et B_j dans G_e ssi les 2
Bipartis B_i et B_j dans G_v sont tels que $Y_i \cap Y_j = \emptyset$.
- Vérification si la table d'ordonnancement est respectée.

Fin

Figure 3.12 Algorithme de MOUHOUB et al de passage du graphe des potentiels au graphe PERT

4.4 Exemple

En a table de d'ordonnancement suite

Code	Ant.
α	-
A	α
B	α
C	A
D	A, B
E	B
F	D
G	D
H	E
I	C
J	F, G
K	G, H
L	J, K
Ω	I, L

Table 3.2 Table d'ordonnancement

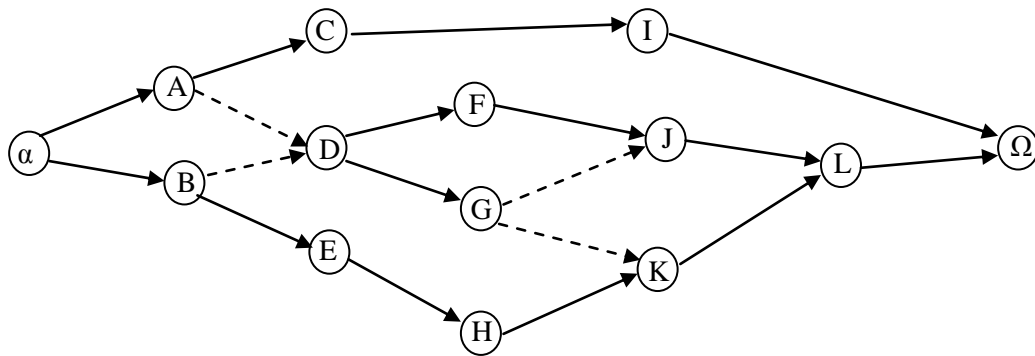


Figure 3.13. (a). Le graphe des potentiels correspondant à la table 3.2

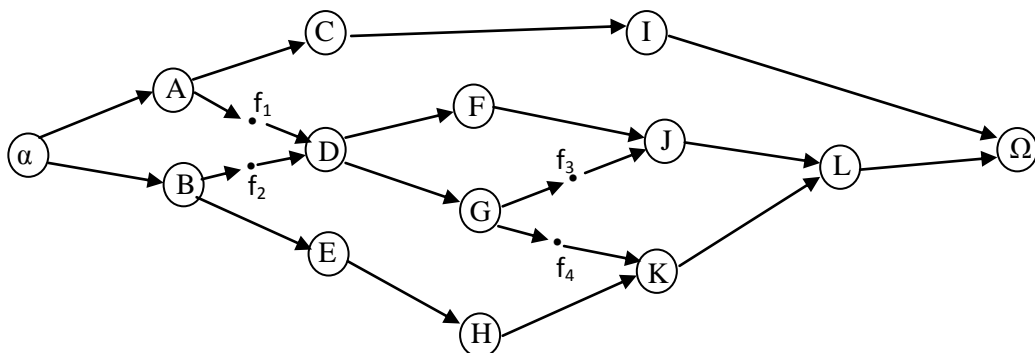


Figure 3.13. (b) Le graphe des potentiels modifié par l'introduction des tâches fictives f_i

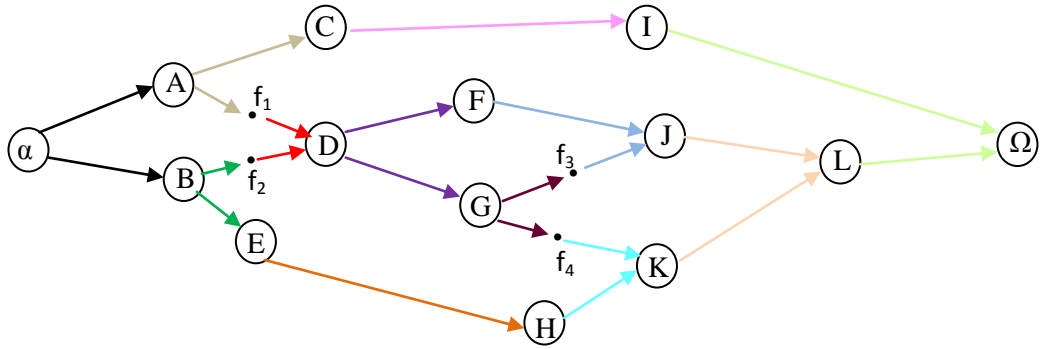


Figure 3.13. (c) Le graphe des potentiels modifié par l'introduction des tâches fictives f_i avec réorganisation des tâches en niveaux et partition des arcs en bipartis complets.

Les bipartis complets du graphe des potentiels sont:

$B1 = (\{\alpha\}, \{A, B\})$, $B2 = (\{A\}, \{C, f1\})$, $B3 = (\{B\}, \{f2, E\})$,

$B4 = (\{f1, f2\}, \{D\})$, $B5 = (\{D\}, \{F, G\})$, $B6 = (\{C\}, \{I\})$,

$B7 = (\{E\}, \{H\})$, $B8 = (\{G\}, \{f3, f4\})$, $B9 = (\{F, f3\}, \{J\})$,

$B10 = (\{f4, H\}, \{K\})$, $B11 = (\{J, K\}, \{L\})$, $B12 = (\{I, L\}, \{\omega\})$.

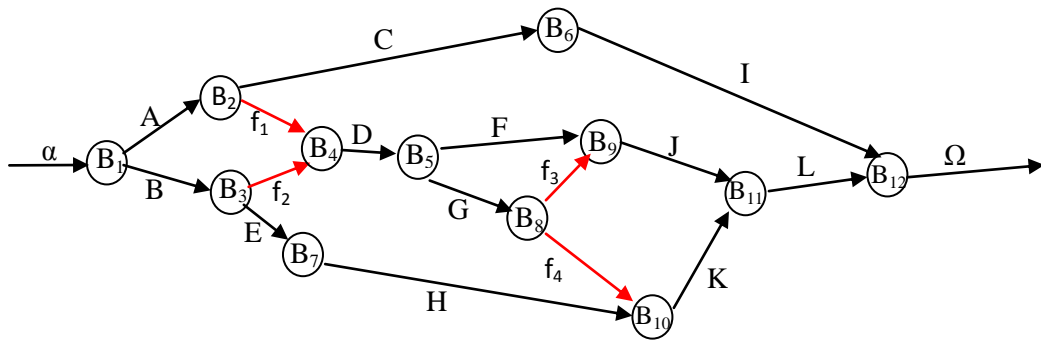


Figure 3.13. (d) Construction du graphe PERT à partir du graphe des potentiels

4.5 Discussion

Nous venons de voir une technique nouvelle qui a pu introduire les graphes adjoints dans les problèmes d'ordonnancement de projet. L'algorithme résultant est de complexité polynomiale ($O(n^3)$). L'algorithme se termine puisqu'il est constitué d'instructions séquentielles sauf dans le cas d'existence des « Z » où on doit créer, dans le graphe des potentiels les tâches fictives fi.[20]

5 Conclusion

Nous avons présentés dans ce chapitre une nouvelle technique du MOUHOU et al qui permet de passer d'un graphe de méthode des potentiels à un graphe de la méthode PERT par l'utilisation du graphe adjoint.